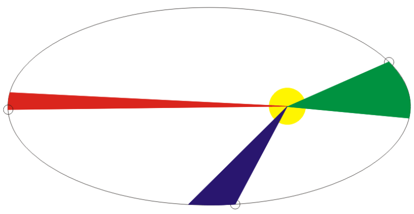
Законы Кеплера.



Законы Кеплера — три эмпирических соотношения, интуитивно подобранных Иоганном Кеплером на основе анализа астрономических наблюдений Тихо Браге, изложенные в опубликованных им работах между 1609 и 1619 годами. Описывают идеализированную гелиоцентрическую (движение вокруг Солнца) орбиту планеты.

Кеплер сформулировал их так:

1. Каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает собой равные площади.

3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей орбит планет.

В данной задаче предлагается вывести все три закона Кеплера в следующих предположениях:

1. Планета вращается вокруг Солнца.
2. Планета взаимодействует только с Солнцем.
3. Солнце неподвижно.

Часть 0.1 Математическое введение.

В данной задаче очень удобным (и естественным) выбором является **полярная система координат.** В качестве центра (точка (0,0)) выберем Солнце.

Это система задает положение точки М с помощью двух величин: расстояние ρ и угол φ (см рис.)

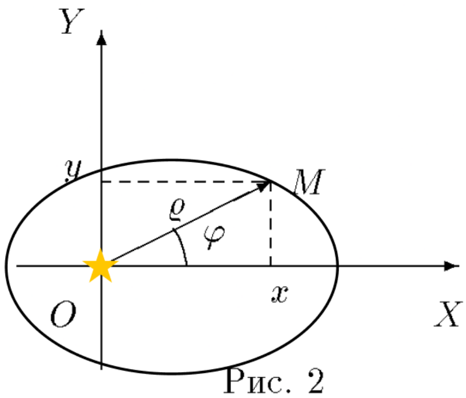
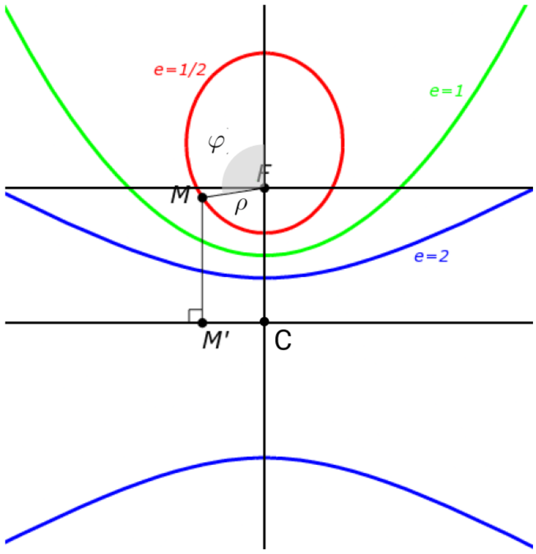


Рис. 2

ВНИМАНИЕ: Во всех пунктах задачи используется полярная система координат если не оговорено иное!

(0.1.1) Запишите преобразования координат из полярных в декартовые. Т.е. выразите $x = x(\rho;\varphi)$ и $y = y(\rho;\varphi)$

Эллипс - это частный случай **конического** сечения. Все конические сечения (парабола, гипербола, эллипс), можно описать следующим способом:



Выберем на плоскости точку **F** и прямую **M'C** и зададим вещественное число **e.** Тогда геометрическое место точек **M,** для которых отношение расстояний до точки **F** и до прямой **M'C** равно **e (эксцентриситет)** является коническим сечением. (см рис.)

Т.е. $e \cdot MM' = FM$

Пусть $FC = p$.

(0.1.2) Найдите $\rho(\varphi)$ для произвольного конического сечения. Ответ выразите через φ, p, e

---

Даже если у вас не получилось выражение $\rho(\varphi)$, вы можете пользоваться готовым выражением:

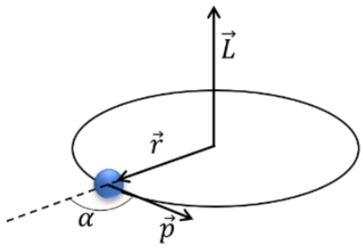
$$\rho(\varphi) = \frac{pe}{1 - e\cos\varphi}$$

(0.1.3) При каких значениях e коническое сечение является эллипсом? Параболой? Гиперболой? Окружностью?

Часть 0.2 Физическое введение.

Для описания движения планет удобным является величина, называемая **момент импульса**.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



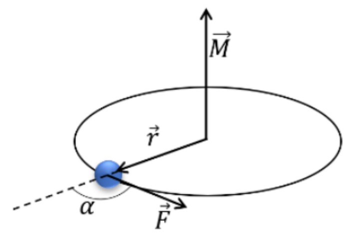
Где $\vec{p}$ - импульс планеты, $\vec{r}$ - радиус-вектор (положение) планеты относительно какой-то точки (в нашей задаче точка - это Солнце)(см рис.).

По аналогии со вторым законом Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Для момента импульса справедливо:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



Где $\vec{M}$ - момент силы $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

При движении планеты вокруг Солнца, на планету действует сила гравитационного взаимодействия:

$$\vec{F} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Где M - масса Солнца. m - масса планеты. G - гравитационная постоянная. $\vec{r}$ - вектор расстояния от Солнца к планете (в нашей задаче - положение планеты, т.е. радиус-вектор)

(0.2.1) Найдите момент силы гравитационного взаимодействия, действующий на планету. Является ли он постоянным?

(0.2.2) Изменяется ли момент импульса планеты? Если да, то каким образом?

Часть 1. Первый закон Кеплера.

Рассмотрим движение планеты вокруг Солнца.

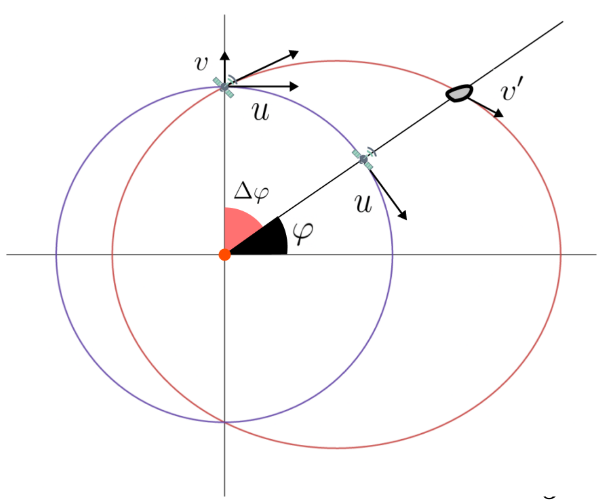
(1.1) Запишите, чему равен момент импульса L планеты.

Ответ выразите через $m, \rho, \frac{d\varphi}{dt}$

(1.2) За счет действия силы гравитационного притяжения в течение промежутка времени изменяется скорость планеты. Найдите это изменение dv. Как оно направлено? Ответ выразите через M, ρ, G, dt

(1.3) Найдите изменение скорости планеты в зависимости от изменения угла $\Delta v(\Delta\varphi)$. Ответ выразите через $M, m, G, L, \Delta\varphi$

Рассмотрим ситуацию. Спутник вращается вокруг Солнца со скоростью u по окружности. В некоторый момент времени Спутник выбрасывает Камень в радиальном направлении со скоростью v относительно спутника. (см. рис.) Масса спутника μ. Масса Камня m.



Положение камня задается углом φ и расстоянием ρ.

На рисунке показано положения спутника и камня при одном и том же φ . Очевидно, что **они находятся там в различные моменты времени**, однако, для решения этой части задачи это роли не играет.

(1.4) Найдите радиус орбиты спутника R. В дальнейшем считайте его известным. Ответ выразите через G, u, M.

(1.5) Как связаны изменения скоростей спутника и камня, при одном и том же изменении угла $\Delta\varphi$?

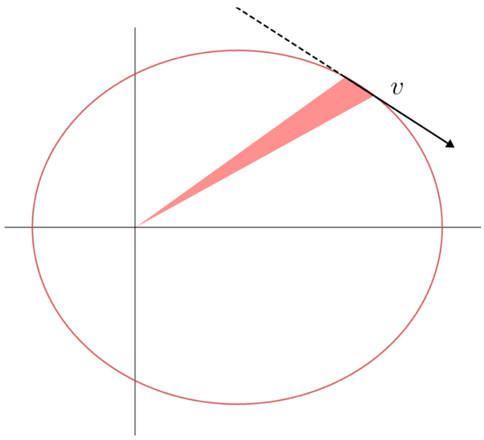
(1.6) Найдите и нарисуйте скорость камня v' после изменения угла на $\Delta\varphi$. Ответ выразите через u, v, φ.

(1.7) Как связаны момент импульса камня и спутника? Используя эту связь, покажите, что камень движется по коническому сечению. Т.е. найдите $\rho(\varphi)$. Ответ выразите через R, v, u, φ

(1.8) Найдите эксцентриситет орбиты Камня. При какой скорости v Камень движется по окружности, параболе, гиперболе? Задает ли скорость v все возможные траектории камня? Ответ выразите через u, v.

Часть 2. Второй закон Кеплера.

Рассмотрим движение планеты вокруг Солнца. При движении планеты, она заметает площадь как показано на рисунке.



(2.1) Запишите формулу для площади треугольника через основание и высоту.

(2.2) Рассмотрим очень маленький треугольник, площадь которого планета заметет на время dt. Найдите эту площадь dS. Ответ выразите через v, dt, h

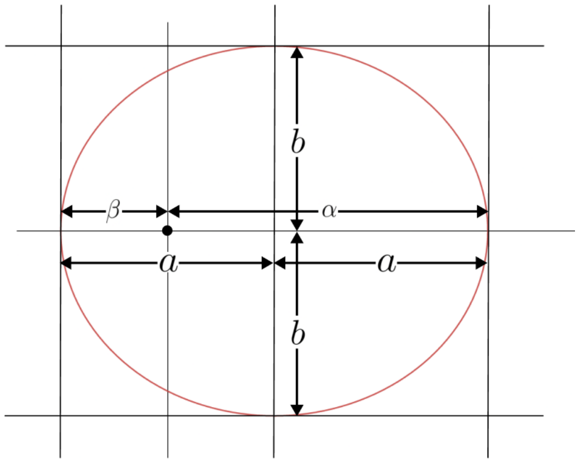
(2.3) Найдите момент импульса L планеты. Ответ выразите через m, v, h

(2.4) Найдите “скорость заметания” площади $\dfrac{dS}{dt}$. Ответ выразите через m, L. Является ли она постоянной? Почему?

(2.5) Какую часть площади эллипса x заметет планета за период обращения? За половину периода? За время wT? Ответ выразите через w.

Часть 3. Третий закон Кеплера.

Вернемся к Части 1. При движении Камня по эллипсу, он пролетает на максимальном α и минимальном β расстоянии от Солнца.



Площадь эллипса связана с его полуосями a и b (см. рис.), как: $S = \pi ab$

(3.1) Получите выражение для большей полуоси a из геометрических соображений. Ответ выразите через α, β

(3.2) Получите выражение для меньшей полуоси b из геометрических соображений. Ответ выразите через α, β

(3.3) Пользуясь пунктом 1.7 получите выражения для α β. Ответ выразите через R, e

(3.3) Используя Второй закон Кеплера, получите выражение для периода T обращения. Ответ выразите через a, b, L, m

(3.4) Путем сравнения Спутника и Камня, покажите, что для выполнения Третьего закона Кеплера $\frac{a^3}{T^2} = const$ в нашем случае достаточно, чтобы было: $\frac{a}{b^2} = const$.

(3.5) Покажите, что $\frac{a}{b^2} = const$, тем самым доказав Третий закон Кеплера.

Математические подсказки:

$\int d\varphi = \varphi + C$ $\qquad$ $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha$

$|\vec{a} \times \vec{a}| = 0$ $\qquad$ $a^n |\vec{a} \times \vec{b}| = |(a^n \vec{a}) \times \vec{b}|$